DISTRIBUTIETHEORIE, cursus 2003–2004.

Tentamen 26 januari 2004, duur: 3 uur.

1.[1] De onderdelen (a), (b) en (c) van deze opgave zijn onafhankelijk van elkaar.
(a)[2] (i) Wat is een distributie op $\mathbb{R}^m$? (ii) Stel $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$. Bewijs: Door

$$< \overline{T}, \varphi > = \overline{< T, \overline{\varphi} >}, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m),$$

wordt een distributie $\overline{T}$ gedefinieerd.
(b)[3](i) Bereken $(\frac{d^4}{dx^4} - 1)\sin|x|$ in de zin van distributies. (ii) Welke stelling gebruik je?
(c)[4] (i) Stel T_n en T zijn distributies op $\mathbb{R}$. Wat betekent $\lim_{n\to\infty} T_n = T$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$? (ii) Stel

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1/\varepsilon^2, & 0 < x < \varepsilon, \\ -1/\varepsilon^2, & -\varepsilon < x < 0, \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

Bereken $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} T_{f_\varepsilon}$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. (Gebruik: $\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + x^2 \int_0^1 (1-t)\varphi''(xt)dt$.)

2.[1] De onderdelen (a) en (b) van deze opgave zijn onafhankelijk van elkaar.
(a)[4] Stel $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (i) Wat is de drager van S? (ii) Geef aan wanneeer S en T aan de convolutievoorwaarde voldoen en defineer in dat geval de convolutie $S * T$. (iii) Stel S en T voldoen aan de convolutievoorwaarde. Bewijs:

$$e^{ax}(S * T) = (e^{ax}S) * (e^{ax}T).$$

Toon onder andere aan dat het rechter lid goed gedefinieerd is.
(b)[5] (i) Bereken met behulp van de symboolrekening in $\mathcal{D}'_+$ de elementaire oplossing bij de differentiaaluitdrukking

$$D = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} - 2.$$

(ii) Bepaal met behulp van (i) de (reguliere) oplossing van $Df = e^x$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. (iii) Controleer je antwoord bij (ii).

3.[1] De onderdelen (a) en (b) van deze opgave zijn onafhankelijk van elkaar.
(a)[5] Gegeven is $\mathcal{F}(e^{-\pi x^2})(y) = e^{-\pi y^2}$. Stel

$$G_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-x^2/2a}.$$

Bereken met behulp van de Fouriertransformatie $G_a * G_b$ voor $a > 0$, $b > 0$. *Hoe* wordt hier *welke* inversiestelling gebruikt?
(b)[4] Stel $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ is homogeen van de graad $\alpha \in \mathbb{R}$. Toon aan dat $\mathcal{F}(T)$ homogeen van de graad $-m - \alpha$ is.